



EXERCICE CORRIGÉ

ÉQUATIONS INÉQUATIONS (1er D)

Exercice 1: Vrai-Faux

Sans résoudre l'équation, et sans effectuer de calculs, dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. L'équation $350x^2 - 3x - 27,5 = 0$ admet deux racines réelles distinctes.
2. Le trinôme du second degré $x^2 - 6x + 9$ est strictement positif pour tout réel x .
3. Si on multiplie par 2 tous les coefficients d'une équation du second degré, alors ses racines sont aussi multipliées par 2.
4. L'équation $x^2 + 15 = 0$ n'a pas de racines réelles.

Solution:

1. Vrai. Les coefficients $a = 350$ et $c = -27,5$ sont de signes contraires, et donc $-4ac > 0$ d'où $\Delta = b^2 - 4ac = b^2 + (-4ac) > 0$ et l'équation admet bien deux racines réelles distinctes.
2. Faux. C'est une identité remarquable: $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$. Ce trinôme s'annule pour $x = 3$.
3. Faux. Les équations $ax^2 + bx + c = 0$ et $2ax^2 + 2bx + 2c = 2(ax^2 + bx + c) = 0$ sont équivalentes et ont les mêmes

solutions.

4. Vrai. Pour tout réel x , on a $x^2 \geq 0$, et donc, $x^2 + 15 \geq 15 > 0$.

En particulier, on ne peut pas avoir $x^2 + 15 = 0$ pour un réel x .

Cacher la correction

Exercice 2: Ensemble de définition de fonctions

Pour chaque fonction, déterminer le plus grand ensemble de définition.

$$1. f(x) = \frac{2x - 3}{2x^2 + x - 21}$$

Solution: L'expression $f(x)$ est définie pour toutes les valeurs réelles de x telles que son dénominateur ne soit pas nul.

On cherche donc les valeurs de x pour lesquelles $2x^2 + x - 21 = 0$.

Ce trinôme du second degré a pour discriminant $\Delta = 1 + 168 = 169 = 13^2 > 0$, et admet donc deux racines réelles distinctes:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1 + 13}{4} = 3 \\ x_2 = \frac{-1 - 13}{4} = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

L'ensemble de définition de f est donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{7}{2}; 3\right\}$.

Cacher la correction

$$2. g(x) = \sqrt{-3x^2 + 14x - 15}$$

Solution: L'expression $g(x)$ est définie lorsque le trinôme du second degré

$$T(x) = -3x^2 + 14x - 15$$

est positif ou nul.

Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 196 - 180 = 16 = 4^2 > 0$, et admet donc deux racines réelles distinctes:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-14 + 4}{2 \times (-3)} = \frac{5}{3} \\ x_2 = \frac{-14 - 4}{2 \times (-3)} = 3 \end{cases}$$

Le trinôme a donc pour signe:

x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$	3	$+\infty$	
$T(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$	$\emptyset$	$-$

Ainsi, l'ensemble de définition de la fonction g est $D_g = \left[\frac{5}{3}; 3\right]$.

Cacher la correction

Exercice 3: Résolution d'inéquationsRésoudre dans $\mathbb{R}$ les deux inéquations suivantes :

1. $\frac{1}{x-1} < \frac{x+1}{x-2}$

Solution: L'ensemble de définition correspond simplement à la non nullité du dénominateur, soit $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

On peut donc transformer l'inégalité pour obtenir

$$\frac{x+1}{x-2} - \frac{1}{x-1} > 0$$

soit, en réduisant au même dénominateur,

$$\frac{x^2 - 1 - x + 2}{(x-1)(x-2)} > 0$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{(x-1)(x-2)} > 0.$$

Le discriminant de $x^2 - x + 1$ est $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. Le numérateur est toujours positif ($a = 1$ donc $a > 0$), il ne reste donc plus qu'à étudier le signe du dénominateur ; on a alors le tableau de signes:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$(x-1)(x-2)$		$+$	$-$	$+$

On obtient donc $S =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$.

Cacher la correction

2. $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10} \leq 1$

Solution: L'ensemble de définition correspond à la non nullité du dénominateur. Le discriminant de $x^2 + 3x - 10$ est $\Delta = 9 + 40 = 49$, d'où les racines :

$$x_1 = \frac{-3-7}{2} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3+7}{2} = 2.$$

L'ensemble de définition est donc

$$\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-5, 2\}.$$

En transformant l'inéquation, on obtient

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10} - 1 \leq 0$$

et, en réduisant au même dénominateur,

$$\frac{x^2 - 5x + 6 - x^2 - 3x + 10}{x^2 + 3x - 10} \leq 0 \iff \frac{-8x + 16}{x^2 + 3x - 10} \leq 0,$$

ce qui équivaut, en divisant par -8 , à

$$\frac{x-2}{x^2+3x-10} \geq 0 \quad (\text{car } -8 < 0).$$

On a alors le tableau de signes de $Q(x) = \frac{x-2}{x^2+3x-10}$:

x	$-\infty$	-5	2	$+\infty$
$x^2 + 3x - 10$		$+$	0	$-$
$x - 2$		$-$	$ $	$-$
$Q(x)$		$-$	$ $	$+$

On obtient donc la solution $S =]-5, 2[\cup]2, +\infty[$.

Cacher la correction

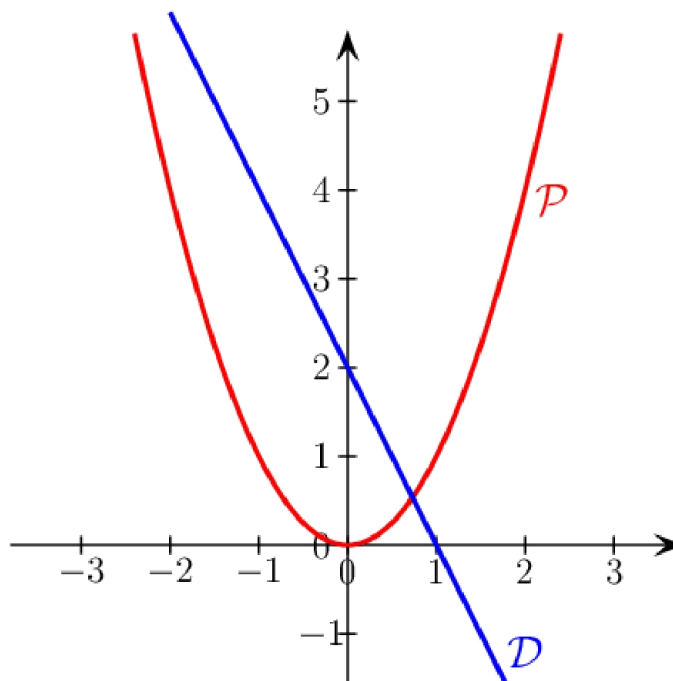
Exercice 4: Droite et parabole - Intersection

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La parabole $\mathcal{P}$ a pour équation $y = x^2$.

1.
 - a. Construire $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -2x + 2$.
 - b. Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.

Solution:

- a. La représentation de la parabole $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$ est la suivante:



- b. Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}$ sont solutions de l'équation :

$$-2x + 2 = x^2$$

soit:

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \iff (x + 1)^2 - 1 - 2 = 0$$

$$\iff (x + 1)^2 = 3$$

$$\iff x + 1 = \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x + 1 = -\sqrt{3}$$

d'où les racines :

$$x_1 = -1 + \sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = -1 - \sqrt{3}.$$

$\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{P}$ en deux points de coordonnées respectives

$$\left(-1 + \sqrt{3}, 4 - 2\sqrt{3}\right) \quad \text{et} \quad \left(-1 - \sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3}\right).$$

Cacher la correction

2. m étant un réel, $\mathcal{D}_m$ est la droite d'équation $y = -2x + m$.

- Montrer que $\mathcal{D}_m$ est parallèle à $\mathcal{D}$.
- Déterminer m pour que la droite $\mathcal{D}_m$ coupe $\mathcal{P}$ en un seul point. Construire la droite correspondante et calculer les coordonnées du point d'intersection.
- Déterminer les valeurs m pour lesquelles la droite $\mathcal{D}_m$ coupe $\mathcal{P}$ en deux points distincts A_m et B_m . On appelle alors I_m le milieu de $[A_m B_m]$. Quel est l'ensemble des points I_m lorsque m varie ?

Solution:

- $\mathcal{D}_m$ a un coefficient directeur égal à -2 , comme $\mathcal{D}$: elle est donc parallèle à $\mathcal{D}$.
- Pour déterminer la droite qui a un seul point d'intersection avec $\mathcal{P}$, il suffit de résoudre l'équation

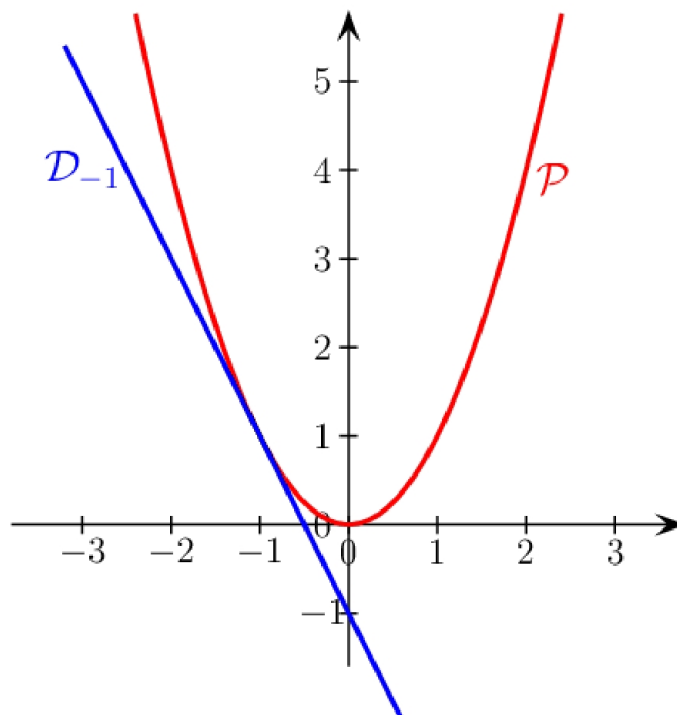
$$-2x + m = x^2 \quad \text{soit} \quad x^2 + 2x - m = 0$$

et de déterminer la condition pour laquelle il n'y a qu'une seule solution. On a $\Delta = 4 + 4m$. Pour avoir une solution unique, il faut et il suffit que $\Delta = 0$, soit $m = -1$. La solution est alors la racine double :

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$$

d'où $y = (-1)^2 = 1$.

On a alors le graphique:



Le point d'intersection de $\mathcal{D}_{-1}$ et $\mathcal{P}$ a pour coordonnées $(-1, 1)$.

- c. On a deux points d'intersection lorsque $\Delta > 0$, soit $4 + 4m > 0$. Soit finalement $m > -1$.

Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

x_A et x_B étant les solutions de $x^2 + 2x - m = 0$. On a

$$x_A + x_B = -\frac{-2 + \sqrt{4 + 4m}}{2} + \frac{-2 - \sqrt{4 + 4m}}{2} = -2$$

donc

$$x_I = -1.$$

A et B sont sur $\mathcal{D}_m$, donc leur milieu I l'est aussi. Donc :

$$y_I = -2x_I + m = m + 2$$

d'où $I(-1, m + 2)$.

D'où l'ensemble des points: $\left\{ (-1, 2 + m), \quad m \in]-1, +\infty[\right\}$.

On obtient donc une demi-droite ouverte définie par: $(x = -1, y > 1)$.

Cacher la correction

Exercice 5: Recherche des coefficients

1. Soit $f(x) = ax^2 + 15x + c$.

Trouver deux réels a et c de telle sorte que f ait pour racines $\frac{4}{3}$ et $-\frac{1}{2}$.

Solution:

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = 0 \iff \frac{16}{9}a + 20 + c = 0$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \iff \frac{1}{4}a - \frac{15}{2} + c = 0$$

On doit donc résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{16}{9}a + c = -20 & (L_1) \\ \frac{1}{4}a + c = \frac{15}{2} & (L_2) \end{cases}$$

$$(L_1) - (L_2) \text{ donne } \left(\frac{16}{9} - \frac{1}{4}\right)a = -20 - \frac{15}{2}$$

$$\text{soit } \frac{55}{36}a = -\frac{55}{2} \text{ d'où } a = -18.$$

En remplaçant a par -18 dans (L_1) on a alors $-32 + c = -20$, d'où $c = 12$.

D'où

$$\begin{cases} a = -18 \\ c = 12 \end{cases}$$

Cacher la correction

2. Soit $g(x) = 7x^2 + bx + 2$. Déterminer les valeurs de b pour lesquelles g n'admet pas de racines.

Solution:

Pour que l'équation $g(x) = 7x^2 + bx + 2 = 0$ n'admette pas de racine, il faut et il suffit que $\Delta < 0$, soit :

$$\Delta = b^2 - 56 < 0$$

Ce trinôme du second degré (dont l'inconnue est b !) est négatif entre ses racines. On doit donc avoir

$$b \in]\sqrt{56}, \sqrt{56}[=]-2\sqrt{14}, 2\sqrt{14}[.$$

Cacher la correction

Exercice 6: Fonction rationnelle

Soit le polynôme $P(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100$.

1. Déterminer trois réels a , b et c tels que la fonction trinôme du second degré

$$Q(x) = ax^2 + bx + c \text{ vérifie la relation:}$$

$$P(x) = (Q(x))^2$$

Solution:

On considère le polynôme $P(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100$, que l'on souhaite écrire sous la forme

$$P(x) = (Q(x))^2.$$

$Q(x) = ax^2 + bx + c$ étant un trinôme du second degré, on peut développer $(Q(x))^2$:

$$\begin{aligned} (Q(x))^2 &= (ax^2 + bx + c)^2 \\ &= (ax^2 + bx + c)(ax^2 + bx + c) \\ &= a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx + c^2 \end{aligned}$$

Les polynômes P et Q^2 sont égaux si et seulement si :

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = 6 \\ b^2 + 2ac = -11 \\ 2bc = -60 \\ c^2 = 100 \end{cases}$$

Q et $-Q$ étant indifféremment solutions, on peut donc prendre $a = 1$ ou $a = -1$: choisissons $a > 0$. On obtient alors:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -10 \end{cases}$$

Finalement $P(x) = (Q(x))^2$, avec $Q(x) = x^2 + 3x - 10$.

Cacher la correction

2. Résoudre alors l'équation $P(x) = 0$.

Solution:

Résoudre $P(x) = 0$ équivaut à résoudre $Q(x) = 0$, soit

$$x^2 + 3x - 10 = 0.$$

On a $\Delta = 9 + 40 = 49$, d'où

$$x_1 = \frac{-3+7}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3-7}{2} = -5.$$

Ainsi $S = \{-5, 2\}$.

Cacher la correction

3. a. Trouver trois réels a, b, c tels que

$$x^3 + 6x^2 + 6x + 5 = (x + 5)(ax^2 + bx + c).$$

Solution:

En développant, on a

$$(x + 5)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (5a + b)x^2 + (5b + c)x + 5c.$$

Par identification des coefficients des termes de même degré on obtient donc

$$\begin{cases} a = 1 \\ 5a + b = 6 \\ 5b + c = 6 \\ 5c = 5 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

et on a donc la factorisation $x^3 + 6x^2 + 6x + 5 = (x + 5)(x^2 + x + 1)$.

Cacher la correction

- b. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction rationnelle f suivante et la simplifier

$$f(x) = \frac{x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100}{x^3 + 6x^2 + 6x + 5}.$$

Solution:

D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100}{x^3 + 6x^2 + 6x + 5} = \frac{P(x)}{x^3 + 6x^2 + 6x + 5} \\ &= \frac{(x^2 + 3x - 10)^2}{(x + 5)(x^2 + x + 1)}. \end{aligned}$$

Déterminons D_f : $f(x)$ existe si et seulement si $(x + 5)(x^2 + x + 1) \neq 0$, soit

$$x + 5 \neq 0 \quad \text{et} \quad x^2 + x + 1 \neq 0.$$

L'équation $x + 5 = 0$ équivaut à $x = -5$.

Cherchons à résoudre $x^2 + x + 1 = 0$:

$\Delta = 1 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$, donc cette équation n'admet pas de solutions réelles.

D'où $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$.

Les racines du trinôme $x^2 + 3x - 10$ sont -5 et 2 (question 2), donc

$$x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2).$$

Finalement

$$f(x) = \frac{(x + 5)^2(x - 2)^2}{(x + 5)(x^2 + x + 1)} = \frac{(x + 5)(x - 2)^2}{x^2 + x + 1} \quad \text{pour } x \neq -5.$$

Cacher la correction

+228 93 39 75 89

